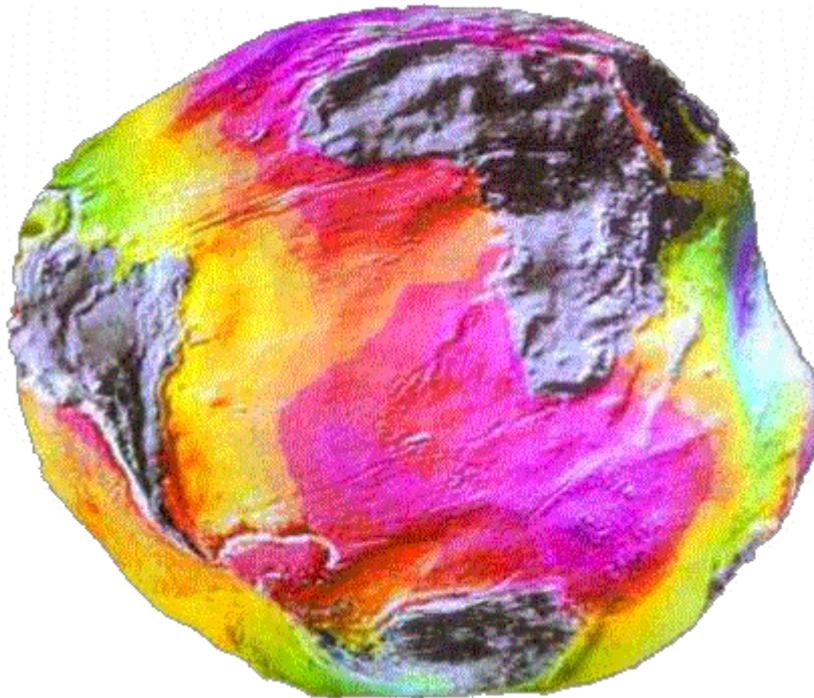




Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Departamento de Matemática

A Colocação por mínimos quadrados e a sua aplicação à Geodesia Física

João Catalão



Lisboa, 2000

Índice

1. Introdução.....	02
2. Colocação por mínimos quadrados.....	04
3. A função covariância do potencial perturbador	09
4. Colocação analítica	11
5.Função covariância	16
5.1 Estimação e modelação da função covariância.....	17
5.2 Expressões finitas da função covariância	22
5.3 Função covariância local	24
5.4 Métodos de ajuste da covariância local.....	27
Referências.....	29

“When in doubt, smooth”
(Sir Harnold Jeffreys)

A colocação por mínimos quadrados e a sua aplicação à Geodesia Física

1. Introdução

A colocação é um método que permite a estimação eficiente do campo gravítico mediante a utilização das características estatísticas de dados heterogéneos sob a forma de funções covariância. Segundo Balmino (1978), os primeiros trabalhos realizados neste âmbito são devidos a Kaula em 1966, Krarup em 1969 e Moritz em 1972 os quais formularam a hipótese estocástica para o campo da gravidade modificando a teoria original dos mínimos quadrados. Para o efeito, é suposto que as observações do campo gravítico são uma realização de um processo estocástico estacionário e ergódico. Partindo deste princípio, aplicaram este método ao estudo da estimação e interpolação do campo gravítico, obtendo estimativas para quantidades funcionalmente dependentes do potencial perturbador, $T(P)$. Neste método, não só resolvemos o sistema de equações para os parâmetros, mas também para o chamado “sinal”, que é a segunda das duas componentes aleatórias das observações. Posteriormente, Moritz (1980) incorporou a ideia de cálculo por partes na colocação e chamou a este novo desenvolvimento colocação sequencial e por partes, que foi utilizada por diversos autores especialmente Schwarz (1978), Rapp (1978; 1986) e Tscherning (1978; 1985; 1986).

A abordagem estatística da colocação é elementar, no sentido em que são utilizadas operações com matrizes de dimensão finita, e constitui um esforço para evitar (quase completamente) uma abordagem mais profunda baseada em espaços vectoriais de funções de dimensão infinita (espaços de Hilbert). De facto, no essencial o que procuramos é o campo gravítico perturbador completo, ou seja, a função $T(P)$, em que o potencial perturbador é um elemento de um espaço de Hilbert de funções de dimensão infinita. Em particular, a teoria da colocação baseada nos espaços de Hilbert permite uma interpretação da colocação por mínimos quadrados como um ajustamento por mínimos quadrados num espaço de dimensão infinita (Tscherning, 1978; 1985; 1986).

Poderá ser questionado, quando será indispensável à resolução do problema, a dimensão infinita dos espaços de Hilbert. As operações no espaço de Hilbert apresentam uma semelhança formal com as operações em espaços de dimensão finita, mas são qualitativamente diferentes. É verdade que o campo gravítico à altitude dos satélites pode ser descrito por um desenvolvimento em harmónicas esféricas truncadas a um grau elevado; os coeficientes deste desenvolvimento formam um vector finito. Assim, se trabalharmos exclusivamente a altitudes elevadas (do satélite), podemos de facto, substituir o espaço de Hilbert por um espaço de dimensão finita, sem comprometer a precisão.

Esta situação muda substancialmente se considerarmos o campo gravítico à superfície da Terra por inclusão de observações de anomalias da gravidade ou desvios da gravidade. O campo gravítico detalhado na superfície da Terra, não poderá ser descrito adequadamente por desenvolvimentos em harmónicas esféricas, nem do ponto de vista teórico (pela não garantia da convergência), nem do ponto de vista prático (porque mesmo que possível, tal desenvolvimento requer um elevadíssimo número de termos, que está para além da capacidade actual de qualquer computador). Por isso, a substituição do espaço de Hilbert por um espaço de dimensão finita não é nem teoricamente adequada nem realizável na prática. Contudo é necessário, uma vez que as equações finais da colocação são fórmulas matriciais de dimensão finita.

A presente exposição tem por objectivo a discussão do método da colocação por mínimos quadrados do ponto de vista das suas aplicações. Consequentemente, serão focalizados os aspectos numéricos e operacionais evitando deliberadamente a argumentação baseada nos fundamentos teóricos do método. O aprofundamento de alguns aspectos teóricos pode ser encontrado em Moritz (1980), Tscherning (1986) e Sansò (1986). A exposição do método da colocação que apresentamos neste capítulo é baseada essencialmente no trabalho de Moritz (1980) e Tscherning (1985) adoptando a notação, usada por estes autores, de modo a simplificar a comparação com outros trabalhos.

2. Colocação por mínimos quadrados

O método da colocação por mínimos quadrados (“Least Squares Collocation”) é um método para determinar o potencial perturbador T , a partir de um conjunto de quantidades mensuráveis inter-relacionadas de diferentes tipos. Consideremos dois conjuntos de quantidades aleatórias, com esperança matemática nula, designadas respectivamente por \mathbf{l} (o vector das medições) e por \mathbf{s} (o vector dos sinais). Sendo conhecido o vector \mathbf{l} , composto por quantidades arbitrárias do campo gravitacional perturbador, como por exemplo a anomalia da gravidade Δg ou desvios da vertical (ξ , η), e representando \mathbf{s} o sinal do potencial perturbador $T(P)$ a ser estimado, o problema enunciado e resolvido por Krarup, em 1969, foi o seguinte : Qual a melhor estimativa de \mathbf{s} com base no conjunto \mathbf{l} de observações ?

Uma estimação linear para o vector \mathbf{s} tem a forma:

$$\hat{\mathbf{s}} = H \mathbf{l} \quad (1)$$

em que H é uma matriz qualquer de dimensão $m \times q$; ou seja, cada componente do vector \mathbf{s} é aproximada por uma combinação linear dos dados \mathbf{l} .

O vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ do erro é dado por $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}$ e a matriz covariância do erro por:

$$C_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^T) = E\{(\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})(\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})\} \quad (2)$$

Os termos diagonais desta matriz são as covariâncias dos erros σ_k^2 dos sinais estimados \hat{s}_k , dados por:

$$\sigma_k^2 = E(\varepsilon_k^2) = E\{(\hat{s}_k - s_k)^2\} \quad (3)$$

A melhor estimação para \mathbf{s} em termos de \mathbf{l} é definida, como a estimação linear centrada de variância mínima, ou seja, a matriz H deverá ser tal que as variâncias dos erros sejam mínimos. Deste modo a estimação do sinal é obtida pela expressão (Moritz, 1980, p. 80):

$$\hat{\mathbf{s}} = C_{s\mathbf{l}} C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}^{-1} \mathbf{l} \quad (4)$$

que nos fornece a melhor estimação linear (não enviesada de variância mínima) do vector do sinal \mathbf{s} em termos do vector de dados \mathbf{l} . Esta fórmula é designada por fórmula de **estimação dos mínimos quadrados**, na qual as matrizes $C_{s\mathbf{l}}$ e $C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}$ são a matriz das covariâncias cruzadas entre o vector \mathbf{l} e \mathbf{s} e a matriz autocovariância dos vectores \mathbf{l} .

Os elementos destas matrizes são a média dos produtos $E(l_i, l_j)$, $E(s_k, l_i)$ $i, j = 1, 2, \dots, q$ e $k=1, 2, \dots, m$. Esta afirmação é verdadeira, pois as nossas variáveis aleatórias são centradas.

Sabendo que qualquer das quantidades mencionadas inicialmente (anomalias da gravidade e desvios da vertical) pode ser representada como um funcional linear do potencial T , veja-se a fórmula fundamental da geodesia física (Catalão, 1999), podemos escrever:

$$l_i = L_i T \quad \text{ou} \quad \mathbf{l} = \mathbf{B} T \quad i=1, 2, \dots, q \quad (5)$$

em que o vector \mathbf{B} compreende os funcionais L_i .

Assim o problema é encontrar T , se forem dados por medição q funcionais lineares $L_i T$. A determinação de uma função por ajuste de uma aproximação analítica a um determinado número de funcionais lineares é chamada **colocação** (Moritz, 1980, p. 85) e, conseqüentemente, o presente método para determinar o campo gravitacional por estimação por mínimos quadrados é chamado **colocação por mínimos quadrados**.

No entanto, na prática, quando efectuamos medições é sempre esperado que seja introduzido algum tipo de erro, ou erros humanos ou erros inerentes ao próprio equipamento. Por este motivo, se as medições l_i que formam o vector \mathbf{l} são afectadas por erros de medição aleatórias n_i , então em vez da equação 5 temos:

$$l_i = L_i T + n_i \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (6)$$

Escrevendo $L_i T = t_i$ obtemos $l_i = t_i + n_i$

Desta forma, a observação l_i foi decomposta num sinal t_i e num ruído n_i . A parte do sinal de l_i representa o elemento do campo gravitacional $L_i T$ (do qual l_i é a medição), e o ruído é um sinónimo para os erros aleatórios de medição.

Em notação simbólica, estas equações são escritas:

$$\mathbf{l} = \mathbf{B} T + \mathbf{n}, \quad \mathbf{B} T = \mathbf{t}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{t} + \mathbf{n} \quad (7)$$

O ruído \mathbf{n} é uma quantidade genuinamente aleatória (estocástica) e tem uma distribuição de probabilidade com uma esperança matemática nula ($E(\mathbf{n}) = 0$). Em geral, supõe-se que o ruído e o sinal não são correlacionados, assim como também não são correlacionados os ruídos das diferentes medições. Isto quer dizer, por exemplo, que se medirmos o valor da gravidade em diversos pontos, o erro que afecta a medição num ponto não é necessariamente o erro que afecta a medição noutro ponto. O que se pode fazer à priori, e geralmente depende do aparelho de medição, é fixar um valor para o desvio padrão dos erros. Neste caso a matriz das covariâncias dos erros é dada por:

$$C_{mm} = \begin{bmatrix} \sigma_g^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_g^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_g^2 \end{bmatrix}$$

A generalização do método da colocação por mínimos quadrados consiste na introdução de um vector de parâmetros X , de dimensão p , que representa alguns tipos de erros sistemáticos ou uma possível transformação de coordenadas. Desta maneira (Moritz, 1980, p. 111):

$$l = AX + BT + n \quad (8)$$

em que A é uma matriz $q \times p$, expressando o efeito dos parâmetros sobre as medições l_i , e $L=(L_1, \dots, L_q)$ é um vector de funcionais lineares. Na maioria dos casos, a matriz A obtém-se por linearização de uma relação funcional que originalmente é não linear. Parte-se do princípio que $q > p$ e que A tem característica máxima.

É de salientar que no caso $B = 0$ a relação (8) fica reduzida à seguinte expressão:

$$l = AX + n$$

e, conseqüentemente, o problema seria reduzido a um simples ajuste por mínimos quadrados dos parâmetros X . Neste caso, a condição dos mínimos quadrados é

$$n^T C_{mm}^{-1} n = \min \quad (9)$$

Trata-se de generalizar esta condição ao caso que nos interessa. Designado por s , como é habitual, o vector sinal com dimensão m que queremos estimar e consideremos $t = BT$. Consideremos ainda um vector v que contém todas as quantidades aleatórias (*ibid*, p. 112):

$$v = \begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix} = (s_1, \dots, s_m, n_1, \dots, n_q) \quad (10)$$

e supondo também que os q primeiros componentes de s coincidem com os de t :

$$v = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \quad (11)$$

Desta maneira, u é, na realidade, o vector $m-q$ que queremos estimar.

A matriz das covariâncias de v é:

$$C_{vv} = \begin{pmatrix} C_{ss} & 0 \\ 0 & C_{nn} \end{pmatrix} \quad (12)$$

supondo que o sinal e o ruído são não correlacionados, a condição (9) pode generalizar-se como :

$$v^T C_{vv}^{-1} v = s^T C_{ss}^{-1} s + n^T C_{nn}^{-1} n = \min \quad (13)$$

Este é o princípio de minimização da colocação por mínimos quadrados. A relação 8 também se pode escrever como:

$$l = AX + Us + n \quad (14)$$

em que U é uma matriz qxm da forma U = (I 0), em que I é a identidade qxq.

O problema de minimizar (14), utilizando a formulação (13), é conseguido por meio do método dos multiplicadores de Lagrange (*ibid*, pp. 114-116) e obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{X} &= (A^T \bar{C}^{-1} A)^{-1} A^T \bar{C}^{-1} l \\ \hat{s} &= C_{st} \bar{C}^{-1} (l - A\hat{X}) \end{aligned} \quad (15)$$

em que $\bar{C} = C_{tt} + C_{nn}$. A primeira destas equações é igual à equação que permite determinar os parâmetros num ajuste clássico por mínimos quadrados, com a diferença de que em vez da matriz C_{nn} aparece a matriz \bar{C} . Uma vez determinada a estimação dos parâmetros \hat{X} obtém-se a estimação do sinal \hat{s} por meio da segunda equação, observando que no caso em que não existem parâmetros, $A=0$, esta equação se reduz à expressão:

$$\hat{s} = C_{st} \bar{C}^{-1} l$$

que consiste numa solução idêntica à solução (4) fazendo $C_{ll} = C_{tt} + C_{nn}$ e $C_{sl} = C_{st}$. Deste modo a matriz das covariâncias cruzadas (C_{st}) entre os vectores s e t é equivalente à matriz das covariâncias entre os sinais a estimar e as observações l . Similarmente, as covariâncias do erro são obtidas por (*ibid*, p. 128):

$$\begin{aligned} \hat{E}_{xx} &= (A^T C_{xx}^{-1} A)^{-1} \\ \hat{E}_{ss} &= C_{ss} - C_{sl} C_{ll}^{-1} C_{sl}^T + C_{sl} C_{ll}^{-1} A E_{xx} A^T C_{ll}^{-1} C_{sl}^T \end{aligned} \quad (16)$$

É óbvio das equações (15) que o operador L não entra explicitamente nas equações de estimação. A razão é que, definindo uma função covariância para uma quantidade do campo perturbador podemos obter funções covariância para todas as quantidades relacionadas por aplicação da equação (5) à função covariância. Este processo é designado por “lei da propagação da covariância”. Assim, uma função covariância K(P,Q) dada para s podemos determinar a função covariância C(P,Q) de t aplicando a operação da fórmula (5) duas vezes à função K(P,Q)

$$C(P,Q) = L_{AP} (L_{AQ} (K(P,Q))) \quad (17)$$

Noutros termos, podemos aplicar a fórmula básica de estimação por mínimos quadrados (4) para o cálculo de qualquer elemento do campo gravitacional perturbador, a partir de dados que sejam arbitrariamente outros elementos deste campo, se calcularmos todas as covariâncias por propagação de covariâncias com base na mesma função $K(P,Q)$. O resultado assim obtido será consistente. As covariâncias são assim vistas como portadoras da estrutura analítica do campo gravitacional perturbador, devendo ser obtidas rigorosamente de uma função covariância $K(P,Q)$ por meio de fórmulas tais como (17).

Uma vez que a função covariância desempenha um papel decisivo em todo o procedimento, um número de questões prática e teóricas está relacionado com esta determinação. Embora não façamos essa discussão no presente trabalho deverá ser mencionado que de modo a se obterem diferentes funções covariância não é necessário validar séries infinitas termo por termo. Existem expressões analíticas equivalentes que dependem unicamente de alguns parâmetros e todas as diferenciações podem ser realizadas directamente nestas expressões facilitando grandemente o cálculo das covariâncias. Para a determinação prática da função covariância a referência é feita a Tscherning and Rapp (1974), Moritz (1980) e Knudsen (1987).

Do ponto de vista operacional a aplicação da colocação para problemas em que se pretenda estimar a ondulação do geóide partindo de um conjunto de observações da anomalia da gravidade consiste basicamente num problema de ajustamento com ruído. Considerando então que o nosso sinal s é dado por $s=N(P)$ e que dispomos de um conjunto de anomalias da gravidade em diversos pontos (P_i , $i=1,2, \dots, f$)

$$l = [\Delta g_1, \Delta g_2, \dots, \Delta g_f]^T$$

A fórmula da estimação por mínimos quadrados é:

$$\hat{s} = C_{sl} \bar{C}_{ll}^{-1} l$$

em que:

$$C_{sl} = (C_{P1}^{Ng}, \dots, C_{Pf}^{Ng})$$

$$C_{ll} = \begin{bmatrix} C_{11}^{gg} & \dots & C_{1f}^{gg} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{f1}^{gg} & \dots & C_{ff}^{gg} \end{bmatrix}$$

A expressão da função covariância é obtida da fórmula fundamental da geodesia física (Catalão, 1999) aplicando a lei de propagação das covariâncias e exprime-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{cov}(N(P), \Delta g(Q)) &= \frac{1}{\gamma_0} \left(-\frac{\partial K}{\partial r'} - \frac{2}{r'} K \right) \\ \text{cov}(\Delta g(P), \Delta g(Q)) &= \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial r'} + \frac{2}{r'} \frac{\partial K}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial K}{\partial r'} - \frac{4}{rr'} K \end{aligned} \quad (18)$$

nesta expressão, K é a covariância do potencial perturbador T , e as coordenadas de P e de Q são respectivamente (r, θ, λ) e (r', θ', λ') :

$$K = K(P, Q) = K(r, r', \psi) = K(r, \theta, \lambda, r', \theta', \lambda')$$

Os elementos da matriz C_{ll} e C_{sl} estão relacionados com estas covariâncias, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{ll} &= C_{ij}^{gg} = \text{cov}(\Delta g(P_i), \Delta g(P_j)) \\ C_{sl} &= C_{Pi}^{Ng} = \text{cov}(N(P), \Delta g(P_i)) \end{aligned} \quad (19)$$

É de referir que, numa aproximação esférica, se os pontos $\{P_i\}$ estão ao nível do mar podemos tomar $r = r' = R$ e $\gamma = \gamma' = \gamma_0$.

3. A função covariância do potencial perturbador

Qualquer que seja a solução por colocação por mínimos quadrados é sempre exigível o conhecimento da função covariância, quer se trate de uma simples estimação (4) ou do ajustamento cuja solução é dada pela equação (15). Sendo o potencial perturbador o elemento fundamental em toda a teoria do campo gravítico, é pois essencial o conhecimento da função covariância desse mesmo potencial, bem como da relação entre esta função e as funções covariância das outras quantidades do campo gravítico (ondulação do geóide, anomalias da gravidade ou desvios da vertical).

Consideremos então o potencial perturbador $T(P)$ e $T(Q)$, em dois pontos quaisquer P e Q do espaço, em que ambos os pontos P e Q estão sobre a superfície de uma esfera $r=R$, representando a esfera terrestre média correspondente ao elipsóide de referência numa aproximação esférica. Definimos a função covariância do potencial perturbador $K(P, Q)$ como sendo dada por (Heiskanen and Moritz, 1967, p. 252):

$$K(P, Q) = M\{T(P), T(Q)\}$$

em que M é um operador homogéneo (média sobre toda a esfera) e isotrópico (média sobre todos os azimutes). Um operador com estas características pode ser interpretado de diferentes formas. Pode ser entendido como definindo uma norma num espaço de Hilbert, com núcleo reprodutor, ou pode também ser considerado como a selecção de um operador

M através do qual é definida a melhor aproximação. Contudo, deverá ser notado que as diferentes interpretações não desempenham um papel muito importante pois, quando aplicamos a colocação por mínimos quadrados, estas conduzem a diferentes escolhas da função covariância mas uma vez efectuada esta escolha, as fórmulas computacionais são exactamente as mesmas.

Definindo o operador M como um operador homogéneo e isótropo, a função K(P,Q) será unicamente função da distância esférica entre P e Q (Moritz, 1980, p. 82):

$$K(P, Q) = K(\psi) = M\{T(P) T(Q)\} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} T(\theta, \lambda) T(\theta', \lambda') \sin\theta \, d\alpha \, d\theta \, d\lambda \quad (20)$$

em que (θ, λ) são as coordenadas esféricas do ponto P, (θ', λ') as coordenadas esféricas do ponto Q, e α é o azimute. As coordenadas dos dois pontos P e Q são relacionadas pela distância ψ segundo a fórmula :

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\lambda' - \lambda) \quad (21)$$

De acordo com as condições iniciais do método da colocação, nas quais se exigia que as variáveis sejam centradas, é pois requerido que $M\{T\} = 0$, ou seja:

$$M(T) = \frac{1}{8\pi^2} \iiint T(\theta, \lambda) \sin\theta \, d\theta \, d\lambda \, d\alpha = 0 \quad (22)$$

Este integral é zero se $T(\theta, \lambda)$ não contiver as harmónicas de grau zero, o que pode ser conseguido escolhendo a massa do elipsóide de referência igual à massa da Terra. Simultaneamente o termo de grau 1 pode também ser anulado por meio da escolha apropriada da origem das coordenadas. Deste modo, assumimos que $T(\theta, \lambda)$ não contém as harmónicas esféricas de grau zero e um; então a equação (22) será igual a zero.

Sendo o potencial perturbador uma função harmónica pode ser escrito sob a forma de um desenvolvimento em harmónicas esféricas (Catalão, 1999). Por outro lado, a covariância também pode ser desenvolvida em termos de harmónicas esféricas em função da distância esférica entre dois pontos (Moritz, 1980, p. 83) :

$$K(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n P_n(\cos\psi) \quad \text{com} \quad k_n = \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) \quad (23)$$

Os coeficientes k_n denominam-se variâncias de grau, porque são o valor médio de T_n^2 sobre toda a esfera. De referir também que esta equação relaciona coeficientes normalizados \bar{C}_{nm} e \bar{S}_{nm} com coeficientes não normalizados k_n , mas esta é a forma mais fácil de exprimir a relação entre esses dois tipos de coeficientes. O desenvolvimento desta função no espaço exterior à esfera $r=R$ verifica-se unicamente se impusermos que a função $K(P,Q)$ seja harmónica no exterior dessa esfera, quer como função de P, quer como função

de Q . Este requisito é evidente, tendo em conta a definição de $K(P,Q)$ como sendo a média do produto de $T(P)$ e $T(Q)$, uma vez que T é assumido como harmónica no exterior de $r=R$.

Sabemos que o n -ésimo grau de uma harmónica esférica no exterior de uma esfera depende do raio vector r através de $r^{-(n+1)}$. Assim a função covariância do potencial perturbador $K(P,Q)$ no espaço exterior deverá ter a forma (*ibid*, p. 84):

$$K(P,Q) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{R^2}{r r'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad (24)$$

onde r e r' designam os raios vectores de P e Q , respectivamente.

4. Colocação analítica

A interpretação estatística da colocação, apresentada anteriormente, é baseada no pressuposto de que as observações do campo da gravidade são uma realização de um processo estocástico e que, quer as observações, quer os sinais a estimar, são variáveis centradas. Partindo destas condições iniciais, a função covariância é eleita como elemento central em todo o processo da colocação contendo toda a informação relativa ao comportamento do campo gravítico, sua variabilidade, distância de correlação e anisotropias, bem como a relação funcional entre os vários elementos do campo.

Contudo, nesta abordagem são ignoradas as características analíticas do potencial perturbador como função harmónica e a sua relação com os espaços vectoriais de funções de dimensão infinita, consistindo assim numa interpretação superficial de um método que requer claramente um aprofundamento para a compreensão de todo o fenómeno de estimação do potencial perturbador do campo gravítico e suas quantidades relacionadas.

Neste sentido, consideremos o caso em que a função $K(P,Q)$, a partir da qual são obtidas as covariâncias C_{P_i} e C_{ij} em (18) e (19), não é a função covariância de T , mas uma função analítica arbitrária da forma (24), com coeficientes k_n não negativos satisfazendo a condição que série infinita converge para $r, r' > R$. Tal função $K(P,Q)$, que é simétrica em P e Q e harmónica como função de P e Q no exterior e sobre uma esfera de raio R , é chamada **função núcleo**¹.

¹ Num espaço de Hilbert se um funcional $L_P(f) = f(P)$ é limitado ($|L(f)| \leq M \cdot \|f\|$) então existe um designado “núcleo reprodutor”. Designando por $K_P(Q)$ o representante de L_P então $(K_P(Q), f(Q)) = f(P)$. Se o valor de P varia, temos uma aplicação $K(P,Q): \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$, onde o núcleo reprodutor é dado por: $K(P,Q), f(Q) = f(P)$. O núcleo reprodutor pode ainda ser expresso usando uma base ortonormal de forma:

$$K(P,Q) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(P) f_i(Q). \text{ Os espaços de Hilbert com estas características designam-se por Espaços de$$

Hilbert com Núcleo Reprodutor e têm um papel indispensável na determinação do potencial (Tscherning, 1985).

Neste caso, a estrutura analítica completa do campo gravítico perturbador é preservada: obtemos um campo gravitacional completamente consistente, no sentido em que os dados observacionais l_i são exactamente reproduzidos, e as várias quantidades estimadas s_k se referem ao mesmo campo, em vista da invariância em ordem à transformação linear do sinal. Dito de outra forma, os q dados l_i não determinam completamente o potencial T . Existem infinitas funções $T(P)$ compatíveis com as observações, e a utilização de diferentes funções núcleo $K(P,Q)$ em (15) corresponde a diferentes possíveis campos gravitacionais, todos internamente consistentes.

Sabendo que, sob certas condições, a função potencial perturbador $T(P)$ é elemento de um espaço de Hilbert, o nosso objectivo consiste na determinação da melhor aproximação a esta função, segundo os princípios clássicos de minimização de Gauss, ou seja mínimos quadrados e mínima variância. Para o efeito consideremos um conjunto de elementos lineares e independentes quaisquer $g_i \in H$, com $i=1,2,..n$ (H é um espaço de Hilbert), é possível encontrar a única melhor aproximação \tilde{T} à função $T \in H$ (Tscherning, 1985, p. 288):

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^n a_i g_i \quad (25)$$

no sentido que $\tilde{T}-T$ tenha a menor norma possível. Isto significa que, para qualquer conjunto b_i , $i=1, \dots, n$, se verificam as relações (*ibid*, p. 288):

$$\|T - \tilde{T}\| = \left\| T - \sum_{i=1}^n a_i g_i \right\| \leq \left\| T - \sum_{i=1}^n b_i g_i \right\| \quad (26)$$

As constantes $\{a_i\}$ da equação (25) são obtidas directamente da expressão matricial

$$\{(g_i, g_j)\} \{a_j\} = \{(T, g_i)\}$$

em que (η_i, η_j) se refere ao produto interno entre dois vectores do espaço de Hilbert.

De notar que, para determinarmos \tilde{T} , é necessário que T seja elemento do mesmo espaço de Hilbert que as funções g_i , de modo que (T, g_i) possa ser calculado e de modo a que sejam calculados todos os produtos internos.

Se utilizarmos para g_i os representantes dos funcionais correspondentes às observações $g_i=K(P,L_i)$, em que $K(P,Q)$ é o núcleo reprodutor de um espaço de Hilbert que tem o potencial perturbador como elemento, então é conseguida a melhor aproximação linear:

$$\begin{aligned} \{(g_i, g_j)\} \{a_j\} &= \{K(L_i, L_j)\} \{a_j\} \\ &= \{(T, g_i)\} = \{(T, K(P, L_i))\} = \{L_i T\} \end{aligned} \quad (27)$$

em que $L_i T$ são quantidades observadas. Neste caso verificamos que (*ibid*, p. 290):

$$L_i \tilde{T} = \sum_{k=1}^n a_k L_i(g_k) = \sum_{k=1}^n \{L_k T\}^T \{K(L_k, L_j)\}^{-1} \{K(L_k, L_j)\} = L_i T \quad (28)$$

ou seja, existe uma igualdade entre as observações e os valores calculadas usando a melhor aproximação \tilde{T} .

A verificação desta condição é a base para a colocação por mínimos quadrados. Uma função \tilde{T} é obtida de modo que a equação (28) é verificada e \tilde{T} tem a norma mínima entre os elementos do espaço de Hilbert que verificam esta equação.

Consideremos o caso de um espaço vectorial de funções harmónicas no exterior de uma esfera de raio R e regular no infinito, com o seguinte produto interno (*ibid*, p. 283):

$$(f, g) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(R, \varphi, \lambda) g(R, \varphi, \lambda) \cos \varphi d\lambda d\varphi \quad (29)$$

em que a base ortonormal é dada pelas harmónicas esféricas sólidas completamente normalizadas (veja-se Catalão (1999)):

$$V_{ij}(r, \theta, \lambda) = \frac{R^{i+1}}{r^{i+1}} \bar{P}_{ij}(\cos \theta) \begin{cases} \cos j\lambda & i \geq j \geq 0 \\ \text{sen}|j|\lambda & -i \leq j \leq 0 \end{cases} \quad (30)$$

O facto de termos exigido que H é composto de funções regulares no infinito tem como consequência que só se podem usar funções base com $i > 1$, (confirmando o anterior resultado da fórmula de Stokes e na dedução da expressão 23).

O núcleo reprodutor deste espaço é :

$$K(P, Q) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i V_{ij}(P) V_{ij}(Q) \quad (31)$$

ou seja

$$K(P, Q) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{R^{2i+2}}{(r r')^{i+1}} P_i(\cos \psi) (2i+1) \quad (32)$$

A norma usada neste exemplo é um invariante rotacional, ou seja, se duas funções f e g se tornam idênticas, após a rotação do sistema de coordenadas, então $\|f\| = \|g\|$. Pode ser demonstrado que todos os núcleos reprodutores de tais espaços têm a forma (*ibid*, p. 296):

$$K(P, Q) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \left(\frac{R^2}{r r'} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi) \quad (33)$$

em que $R > 0$ e σ_i são constantes positivas. Comparando esta expressão com a expressão (24) da covariância do potencial perturbador, verificamos que a adopção de uma norma

invariante rotacional equivale à introdução do operador M também ele homogéneo e isotrópico, na abordagem estatística.

O problema consiste na construção de um núcleo reprodutor de tal modo que a aproximação a T seja a melhor possível. Neste espaço o cálculo de um valor, p.e. $\tilde{T}(P)$, deverá ser igual à combinação linear de valor observados, que se supõe serem também valores de T em certos pontos, Q_i :

$$\tilde{T}(P) = \sum_{i=1}^n b_{P_i} T(Q_i) \quad (34)$$

utilizamos o índice P no coeficiente b para realçar que estes coeficientes dependem de P .

O erro de estimação é

$$e_p = T(P) - \tilde{T}(P) = T(P) - \sum b_{P_i} T(Q_i)$$

e

$$e_p^2 = T(P)^2 - 2 \sum_i b_{P_i} T(P) T(Q_i) + \sum_i \sum_k T(Q_i) T(Q_k) b_{P_i} b_{P_k} \quad (35)$$

A ideia é determinar os coeficientes b_{P_i} de tal modo que o valor médio de e_p^2 seja mínimo para diferentes configurações do conjunto de pontos $\{P, Q_i, i=1, \dots, n\}$. As diferentes configurações são obtidas por uma rotação em torno da origem. De modo a exprimir esta relação, introduzimos o operador média M , anteriormente definido (20), e colocamos:

$$K_{ik} = M\{T(Q_i), T(Q_k)\} \quad e \quad K_{Pi} = M\{T(P), T(Q_i)\} \quad (36)$$

e

$$K_0 = M\{T(P)^2\}$$

em que K é função covariância do potencial perturbador.

Então o valor médio de e_p^2 é dado por (*ibid*, p. 300):

$$m_p^2 = M\{e_p^2\} = K_0 - 2 \sum_i b_{P_i} K_{P_i} + \sum_i \sum_k b_{P_i} b_{P_k} K_{ik} \quad (37)$$

querendo minimizar esta expressão:

$$\frac{\partial m_p^2}{\partial b_{P_i}} = 0 \quad (38)$$

ou

$$\sum_{k=1}^n K_{ik} b_{P_k} = K_{P_i} \quad (39)$$

de tal modo que

$$\tilde{T}(P) = \sum_{i=1}^n a_i K_{p_i} \text{ com } \{a_i\} = \{K_{ik}\}^{-1} \{T(Q_k)\} \quad (40)$$

Verifica-se facilmente que $\tilde{T}(Q_i) = T(Q_i)$ $i=1, \dots, n$ pelo que este procedimento nos fornece a solução mínimos quadrados. Teremos unicamente que provar que $\tilde{T}(P)$ é minimizado nalguma norma. O que como sabemos se verificará se a função covariância for o núcleo reprodutor de algum espaço de Hilbert de funções harmónicas. Esta condição também é facilmente verificável se M for a média de todas as configurações obtidas por rotação em torno da origem como na fórmula (20).

Este aspecto analítico da colocação por mínimos quadrados é de grande significado básico teórico e prático. Mostra que uma função núcleo genérica pode ser utilizada para obter um campo gravitacional consistente que é compatível com as observações. A função covariância $K(P,Q)$ não pode ser determinada com exactidão empiricamente uma vez que para este fim necessitamos da função $T(\theta, \lambda)$ entrando em (20). Ou seja, necessitamos conhecer o potencial perturbador em toda a esfera $r = R$, o que obviamente não é o caso. **A função covariância empírica utilizada será uma expressão analítica ajustada aos dados e terá a característica de uma função núcleo genérica.**

Uma interessante consequência da utilização da função covariância como função núcleo foi apontada por Tscherning (1985). Uma vez que $K(P,Q)$ da equação (32) é o núcleo reprodutor então os vectores base são:

$$V_{ij}^* = \left(\frac{\sigma_i}{(2i+1)} \right)^{1/2} V_{ij} \quad (41)$$

Podemos então determinar a norma e produto interno se soubermos a expressão de uma função em ordem à base V_{ij} . Usando o desenvolvimento em harmónicas esféricas (26) e a expressão da norma, resulta:

$$\|T\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{k_n} \sum_{m=0}^n [\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2] \quad (42)$$

Se escolhermos $K(P,Q)$ como função covariância, então k_n é dado pela expressão (23) e a expressão anterior simplifica-se:

$$\|T\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} (2n+1) \quad (43)$$

Este resultado significa que a norma de T não é finita e, conseqüentemente o potencial T não pertence ao espaço de Hilbert H . Este facto, que a colocação por mínimos quadrados partilha com a teoria da estimação de processos estocásticos, aparece mais como uma subtilidade matemática do que como uma dificuldade prática. Contudo, na prática, a função covariância nunca poderá ser determinada exactamente, uma vez que necessitaria do conhecimento de T ou Δg sobre toda a esfera terrestre e as funções covariâncias

empírica podem sempre ser modificadas de tal maneira que (42) se torne finita. Por exemplo, se as variâncias de grau k_n forem conhecidas com exactidão, será suficiente mudar k_n para $k_n (1 + \varepsilon)^n$, sendo ε positivo e tão pequeno quanto se queira, para mudar a divergência de (42) para convergência.

5. Função covariância

A aplicação do método da colocação por mínimos quadrados para efeitos da estimação do campo gravítico da Terra requer uma função covariância que exprima/contenha as relações entre as observações e a relação entre as observações e as quantidades estimadas. Em geral podemos dizer que a função covariância reflecte o comportamento do campo gravítico descrevendo a magnitude da sua variação e da rugosidade. Do ponto de vista estatístico, a função covariância caracteriza a correlação estatística de duas quantidades do campo gravítico (por exemplo anomalias da gravidade) em dois pontos distintos, ou seja a tendência que apresentam em ter a mesma magnitude e o mesmo sinal. A determinação da função covariância é sempre necessária seja como indicador do comportamento do campo gravítico numa determinada região seja o caso presente em que se pretende estimar novos valores da anomalia da gravidade.

Em princípio a função covariância da expressão 24 é por definição uma função *covariância global*. A sua determinação é feita com recurso ao cálculo de infinitos coeficientes com base em observações distribuídas por toda a Terra. Tscherning and Rapp (1974) desenvolveram alguns modelos da função covariância determinando uma expressão para a função covariância empírica global.

No estudo que pretendemos realizar, os dados estão distribuídos numa pequena região da Terra, pelo que deverá ser introduzida alguma simplificação na determinação da função covariância, designando-se neste caso por função *covariância local*. A função covariância local foi definida por Goad *et al.* (1984) que introduziu esta noção como "um caso especial da função covariância global em que a informação de comprimento de onda superior à extensão da área local é removida e é assumido que a informação no exterior, mas junto à área, tem uma variação similar no seu interior". Estes autores sugeriram também que os modelos de Tscherning and Rapp deverão ser utilizados de modo a ajustarem uma expressão aos valores empíricos, da mesma forma que no caso global.

A determinação da covariância local será efectuada para cada zona estimando os coeficientes de um modelo paramétrico por meio do ajuste aos dados empíricos da função covariância. A primeira decisão a tomar consiste na definição da dimensão óptima das zonas, pois se, por uma lado, deverão ser suficientemente grandes para dispormos de suficientes dados de observação que cumpram a condição do método (média zero), por outro lado, devem ser suficientemente pequenas para o campo da gravidade seja homogéneo e isotrópico. Mais ainda, se pretendemos efectuar uma boa estimação da distância de correlação, devemos tomar

uma distância esférica pelo menos uma vez e meia a referida distância de correlação (Arabelos and Tscherning, 1988).

5.1 Estimação e modelação da função covariância

A escolha da função covariância apropriada às muitas aplicações da colocação por mínimos quadrados na estimação das várias componentes do potencial perturbador é função de vários parâmetros e é baseado em certos pressupostos relacionados com o campo gravítico. Adoptando a definição da função covariância $K(P,Q)$, (expressão 20), é hipótese que trabalhamos numa aproximação esférica e que a função covariância é igual ao valor médio dos produtos dos valores de $T(P)$ e $T(Q)$, na qual a média é tomada sobre todos os pares de pontos que têm a mesma distância esférica, e conseqüentemente também o mesmo azimute α , de P para Q. Se o valor médio for calculado para uma região, com os limites definidos por $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$ e $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$, então designamos a função covariância regional em complemento à covariância global.

Em ambos os casos é suposto que os pontos estão localizados à mesma altitude r e r' ,

$$K(P,Q) = \frac{1}{2\pi A} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} T(r,\varphi,\lambda) T(r',\varphi',\lambda') \cos\varphi \, d\lambda \, d\varphi \, d\alpha \quad (44)$$

em que A é a área do bloco definido por (φ_0, φ_1) e (λ_0, λ_1) , ψ é a distância esférica entre P e Q, e $\varphi_0 < \varphi' < \varphi_1$, $\lambda_0 < \lambda' < \lambda_1$.

O cálculo desta expressão é feito por substituição dos integrais por somas:

$$K(\psi, \alpha) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T(R, \varphi_i, \lambda_i) T(R, \varphi'_j, \lambda'_j) \quad (45)$$

em que $T(R, \varphi', \lambda')$ é zero se o ponto é exterior à área definida anteriormente e p é o número de produtos com Q na área, $r=r'=R$, α é o azimute entre o ponto P e Q.

Em geral, as funções $K(\alpha)$ para uma determinada distância esférica ψ não são constantes e dizemos que a função covariância será anisotrópica. Uma medida da anisotropia, introduzida por Forsberg (1984), é a razão entre a distância de correlação máxima e mínima. Uma função covariância isótropa terá índice 1. Felizmente, as principais anisotropias podem ser eliminadas por subtracção da atracção topográfica. Ainda mais isótropo será o campo se subtrairmos também um campo geopotencial de ordem elevada. Este procedimento não é indispensável para o cálculo da equação (23), mas a estimação do erro calculado pela equação (16) será muito melhor se for utilizada uma

representação invariante rotacional da função covariância. No capítulo 6 será apresentado um estudo aprofundado sobre a isotropia da função covariância na área de estudo.

Na prática os valores de observação disponíveis não são valores de T mas funcionais lineares L_p de T . Designando por $C(P,Q)$ a covariância das anomalias da gravidade nos pontos P e Q então:

$$\begin{aligned} C(P,Q) &= \text{cov}(\Delta g(P), \Delta g(Q)) \\ K(P,Q) &= \text{cov}(T(P), T(Q)) \end{aligned} \quad (46)$$

Utilizando a lei de propagação das covariâncias e a fórmula fundamental da geodesia física (2.38) aplicada à expressão da covariância do potencial perturbador:

$$K(P,Q) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{R}{r r'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad (47)$$

obtemos

$$C(P,Q) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{R}{r r'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad \text{com } c_n = k_n \frac{(n-1)^2}{r r'} \quad (48)$$

Os coeficientes c_n designam-se variâncias de grau e uma análise harmónica de um conjunto de valores estimados para $C_{\Delta g}(\psi)$ permitirá determinar as primeiras n variâncias de grau, em que n depende do intervalo de amostragem.

A estimação da função covariância $C_{\Delta g}(\psi)$ com base num conjunto de anomalias gravimétricas é designada por **covariância empírica** e os valores desta função são obtidos por integração numérica do valor médio dos produtos das anomalias reduzidas no mesmo intervalo de distância esférica ψ_k , ou seja, de todos os pares de observações cuja distância esférica está compreendida entre $\psi_{k-1} < \psi_{ij} < \psi_k$ estendendo-se a todos os azimutes. Na prática, as observações são um conjunto discreto de pontos distribuídos irregularmente no interior de cada zona, e o cálculo da função covariância é realizado por integração numérica.

Se cada observação Δg_i representar o valor da anomalia numa pequena área A_i e Δg_j representar o valor da anomalia numa pequena área A_j então segundo Knudsen (1987a, 1988):

$$C_k = C(\Delta g, \Delta g, \psi_k) = \frac{\sum_{ij} A_i A_j \Delta g_i \Delta g_j}{\sum_{ij} A_i A_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (49)$$

em que n é o número de anomalias gravimétricas ou equivalentemente o número de pequenas áreas A_i . Quanto mais pequeno for o intervalo da quadrícula de integração maior será o número de dados que entram no cálculo, podendo no limite entrarem todos os dados. Contudo, é preferível uma distribuição espacial homogénea, em cada zona, em oposição a um grande

número de dados irregularmente distribuídos, que implicaria necessariamente um grande número de células sem dados.

Se a área for dividida em pequenas células com uma observação cada, e A_i e A_j forem assumidas iguais então esta expressão reduz-se (Knudsen, 1988):

$$C_k = \frac{\sum_{ij} \Delta g_i \Delta g_j}{N_k} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (50)$$

N_k é o número de produtos no intervalo ψ_k .

Uma medida do erro associado a cada valor estimado da função covariância poderá ser obtida com base na variância e no número de observações. O espaçamento entre observações, interiores às células, é assumido tão pequeno quanto o necessário para que a função observada corresponda ao comportamento real do campo. Considerando que cada célula possui uma única observação, a estimação do erro para o valor C_k é dado por (*ibid*) :

$$\text{err}_k = \frac{C_0}{n_0^{1/2}} \quad (51)$$

em que n_0 é o número de células cobrindo uma região. Prevendo a ocorrência de células vazias e conseqüentemente a diminuição do número de produtos a realizar na equação (50), os erros deverão ser divididos pelo verdadeiro número de produtos N_k relativamente ao número de produtos esperado n_k , ou seja (Knudsen, 1987):

$$\text{err}_{lk} = \frac{C_0}{\sqrt{n_0}} \frac{n_k}{N_k} \quad \text{com} \quad (52)$$

$$n_k = \begin{cases} (\varphi_2 - \varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1) / (\Delta\varphi\Delta\lambda) & k = 0 \\ n_0 2\pi(\psi_k + \psi_{k-1})(\psi_k - \psi_{k-1}) / 2(\Delta\varphi\Delta\lambda) & k > 0 \end{cases}$$

A generalização destas fórmulas para uma qualquer função covariância, relacionando outras quantidades do campo gravítico, é obtida pela substituição de C_0 por $\sqrt{C_0 C'_0}$, com C_0 representando a função covariância das observações l e C'_0 a função covariância das observações l' . O factor n_k / N_k é o quociente entre o número de produtos esperado pelo número de produtos utilizado, pelo que quanto maior o número de células vazias maior será este factor. Sendo o número de células vazias dependente da distribuição espacial das observações e do tamanho de célula escolhida, esta fórmula fornece-nos um constrangimento possível para a selecção do melhor passo de amostragem face aos dados disponíveis (veja-se secção 6.5.2).

Da mesma maneira que a covariância do potencial perturbador se relaciona com a anomalia da gravidade, também se pode relacionar com qualquer outra quantidade do campo gravítico aplicando a lei de propagação das covariâncias. Deste modo:

$$\begin{aligned} \text{cov}(N(P), \Delta g(Q)) &= \sum_{n=2}^{\infty} k_n \frac{n-1}{\gamma r'} \left(\frac{R}{r r'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \\ \text{cov}(N(P), N(Q)) &= \sum_{n=2}^{\infty} k_n \frac{1}{\gamma \gamma'} \left(\frac{R}{r r'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \end{aligned} \quad (53)$$

A utilização destas expressões para efeitos da estimação da ondulação do geóide ou de anomalias da gravidade requer unicamente o conhecimento das variâncias de grau c_n , uma vez que a partir destas se pode obter as variâncias de grau k_n (expressão 48).

A determinação da função covariância desenvolvida como uma soma infinita de polinómios de Legendre, requer o conhecimento de um número infinito de variâncias de grau, o que não será possível sem que se façam algumas considerações sobre o comportamento das variâncias de grau. Consequentemente será escolhido um modelo que represente estes coeficientes. A escolha deste modelo é discutida em Moritz (1980) em que são apresentadas várias expressões. O modelo que usamos é do tipo Tscherning/Rapp (Tscherning and Rapp, 1974) em que os valores da covariância são rapidamente determinados usando uma expressão (e não uma soma) para as várias quantidades do campo gravítico.

Tscherning and Rapp (1974) estudaram vários modelos de covariância global para as anomalias da gravidade tendo como objectivo a determinação das variâncias de grau. Nessa altura os dados disponíveis incluíram uma estimação para $C_{\Delta g}(0)$ (baseada num conjunto de anomalias gravimétricas médias numa área de $1^\circ \times 1^\circ$) e valores de c_n , $n < 21$ (baseada na determinação dos coeficientes do potencial obtidos da análise de órbitas de satélite), o que permitiu o desenvolvimento de uma expressão polinomial simples para c_n e a determinação de um valor para R de modo que $C(\psi)$, dado por 50, se ajustava o melhor possível a estes valores.

Considerando a expressão da covariância das anomalias da gravidade dada pela expressão (50) e considerando a seguinte simplificação de notação $s = (R/rr')^2$ a equação inversa desta é dada por (*ibid*, p. 4):

$$c_n = \frac{2n+1}{2} s^{-(n+2)} \int_0^\pi C(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \quad (54)$$

sendo $\bar{C}(\psi)$ a função covariância das anomalias médias para um bloco de dimensão $\Delta\phi \times \Delta\lambda$ então

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \frac{1}{\beta_n^2 s^{(n+2)}} \int_0^\pi \bar{C}(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi \, d\psi \quad (55)$$

em que β_n é a função de Meissl. Com base num conjunto de 29960 anomalias médias distribuídas por toda a superfície da Terra, representando cada anomalia média um bloco de $1^\circ \times 1^\circ$ foram determinadas, utilizando a expressão anterior, as variâncias de grau c_n obtendo-se os seguintes valores (*ibid*, p. 11):

Grau	c_n obtidos das anomalias	c_n obtidos dos coeficientes do potencial
0	0.07	---
1	2.3	---
2	26.2	7.5
3	58.3	33.9
4	16.0	19.2
5	26.3	21.6
6	36.0	18.9

No mesmo trabalho, foi determinado o valor global de C_0 estimando-se a covariância empírica de todos os dados gravimétricos disponíveis obtendo-se o valor de 1795 mGal^2 .

Os modelos estudados foram os seguintes:

$$\begin{aligned}
 c_n^{(1)} &= A_1 (n-1)^2 & c_n^{(2)} &= A_2 \frac{n-1}{n} & n > 1 \\
 c_n^{(3)} &= A_3 \frac{n-1}{n-2} & & & n > 2 \\
 c_n^{(4)} &= A_4 \frac{n-1}{(n-2)(n+B)} & & & n > 2 \\
 c_n^{(5)} &= A_5 \frac{n-1}{(n-2)(n-i)(n+j)} & & & n > 2
 \end{aligned} \tag{56}$$

em que A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 são constantes, e a covariância é dada pela expressão:

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n^{(k)} \left(\frac{R_B^2}{r r'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \tag{57}$$

expressão idêntica à (48) na qual R foi substituído por R_B , que se designa por raio da esfera de Bjerhammar (Vanicek and Krakiwsky, 1982, p. 577) e tem o valor ligeiramente mais pequeno que R . O raio da esfera de Bjerhammar corresponde a uma esfera totalmente dentro da Terra, fora da qual a função covariância é harmónica. Esta substituição permite a estimação do potencial perturbador T por uma função T que é harmónica no exterior de uma esfera raio R_B . A aproximação de uma função T , harmónica no exterior da superfície terrestre, por uma função T harmónica fora da esfera de raio R_B e portanto interior à Terra é assegurada pelo teorema de Runge (Moritz, 1980, pp. 67-74).

A estimação dos parâmetros A_i e B resultou do ajuste destes modelos às variâncias de grau obtidas a partir dos coeficientes do potencial e das variâncias de blocos de anomalias médias de 1° e 5° . Desse ajuste concluiu-se que o modelo que melhor se aproxima ao valor da anomalia na superfície da Terra é o modelo 4 com o parâmetro $B=24$. Foram determinadas as seguintes constantes:

$$\begin{aligned}
k_n &= A / (n-2) (n-1) (n+B), n > 2 \quad c_2 R^2 = 7.5 \text{ mGal}^2 \\
R &= R_E - 1225 \text{ m} \quad A R^2 = 425.28 \text{ mGal}^2 \quad (58) \\
s &= 0.99967
\end{aligned}$$

Desde 1974 foram efectuadas outras estimações de uma forma um pouco mais complexa, representando como soma de expressões como a (56) usando para cada expressão um valor diferente de R e A, Moritz (1978) ou Moritz (1980, secção 23).

A principal razão para estes novos desenvolvimentos/estimações para c_n residiu no facto de que o modelo (58) implica um valor muito elevado para a variação média global dos gradientes horizontais da gravidade de aproximadamente $3500 E^2$ ($1E = 10^{-9} s^{-2}$) sob a superfície da Terra (Tscherning, 1976). Este valor é claramente muito elevado para zonas de variação altimétrica inferior a 500 m. Contudo, em zonas montanhosas e em zonas de oceano profundo, o valor é muitas vezes demasiado pequeno. Por isso esta estimação poderá ainda ser uma estimação válida para a variação média global.

5.2 Expressões finitas da função covariância

Pelo exposto anteriormente, o cálculo da função covariância envolve a determinação de somatórios infinitos. Tscherning and Rapp (1974) desenvolveram um conjunto de expressões que permitem transformar a expressão da covariância numa expressão finita, ou seja numa expressão que tem um número finito de termos.

Para as quantidades c_n e k_n já definidas anteriormente temos as correspondentes funções covariância:

$$K(P, Q) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n s^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad C(P, Q) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n s^{n+2} P_n(\cos \psi) \quad (59)$$

A técnica utilizada para obter as expressões finitas é bastante simples e passa pela separação desta função em componentes, que multiplicadas por constantes apropriadas nos reconstruam a função covariância. Estas componentes são (*ibid*, p. 31):

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} P_n(t) = s \sum_{n=0}^{\infty} s^n P_n(t) = \frac{s}{\sqrt{1-2st+s^2}} \quad (60)$$

$$F_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+i} s^{n+1} P_n(t) \quad \text{para } i > 0 \quad (61)$$

$$F_i = \sum_{n=-i+1}^{\infty} \frac{1}{n+i} s^{n+1} P_n(t) \quad \text{para } i \leq 0 \quad (62)$$

O denominador da equação (60) é uma das quantidades básicas nos próximos desenvolvimentos pelo que foi utilizada a seguinte simplificação:

$$L = \sqrt{1 - 2st + s^2} \quad M = 1 - L - st \quad N = 1 + M - st \quad (63)$$

Com estas simplificações, os primeiros elementos das funções F_i são dados por (*ibid*, p. 34):

$$\begin{aligned} F_{-2} &= s \left(M \left(\frac{3ts+1}{2} \right) + s^2 \left(P_2(t) \ln \frac{2}{N} + \frac{1-t^2}{4} \right) \right) \\ F_{-1} &= s \left(M + ts \ln \frac{2}{N} \right) \\ F_0 &= s \ln \frac{2}{N} \quad F_1 = \ln \left(1 + \frac{2s}{1-s+L} \right) \end{aligned} \quad (64)$$

Sabendo que para o modelo 4 a expressão das variâncias de grau pode ser escrita como (*ibid*, p. 44):

$$c_n = \frac{1}{(B+2)(B+1)} \left[\frac{B+1}{n-2} - \frac{B+2}{n-1} + \frac{1}{n+B} \right] \quad (65)$$

então as expressões finitas da função covariância podem ser escritas da seguinte forma (*ibid*, p. 46):

$$\begin{aligned} K(P, Q) &= \frac{A R^2}{(B+2)(B+1)} \left[\sum_{n=3}^{\infty} \frac{B+1}{n-2} s^{n+1} P_n(t) - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{B+2}{n-1} s^{n+1} P_n(t) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n+B} s^{n+1} P_n(t) \right] \\ &= \frac{A R^2}{(B+2)(B+1)} \left[(B+1) F_{-2} - (B+2)(F_{-1} - s^3 P_2(t)) + F_B - \frac{s}{B} - \frac{s^2 t}{B+1} - \frac{s^3 P_2(t)}{B+2} \right] \end{aligned} \quad (66)$$

Para a função covariância das anomalias da gravidade obtém-se uma expressão semelhante dada por (*ibid*, p. 45) :

$$C(P, Q) = \frac{A s}{(B+2)} \left[(B+1) F_B - \frac{s}{B} - \frac{s^2 t}{B+1} - \frac{s^3 P_2(t)}{B+2} + F_{-2} \right] \quad (67)$$

Sendo B um valor inteiro variável desta equação, a única dificuldade no seu cálculo reside unicamente na determinação da função F_B . No entanto, Tscherning and Rapp (1974) apresentam também uma fórmula recursiva para a sua determinação (*ibid*, p. 37):

$$F_{i+1} = \frac{1}{s} \left(L + (2i-1)t F_i - \frac{(i-1)}{s} F_{i-1} \right) \quad (68)$$

Assim verificamos que quanto maior fôr o valor de B mais lenta será a determinação da expressão da covariância uma vez que a função F_B é obtida por recorrência. Naturalmente se se utilizar as expressões iniciais da função covariância baseadas em somatórios é indiferente a o valor B seleccionado.

5.3 Função covariância local

A função covariância local é geralmente calculada com dados aos quais foi retirada a contribuição de um modelo de referência T_0 de ordem N. Neste caso a função covariância consistirá de duas partes, na qual a primeira parte representa o ruído dos coeficientes do campo de referência e a segunda parte utiliza um modelo tipo Tscherning/Rapp para $n > N$:

$$C(P, Q) = \sum_{n=2}^N c_n^e \left(\frac{R_E^2}{r r'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \left(\frac{R_E^2}{r r'} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad (69)$$

$$\text{com } c_n^e = \left(\frac{GM}{R_E} \right)^2 \sum_{mj=0}^n \left(\sigma^2(\Delta C_{nm}) + \sigma^2(\Delta S_{nm}) \right) \quad (70)$$

em que $\sigma^2(\Delta C_{nm})$ e $\sigma^2(\Delta S_{nm})$ são as variâncias dos erros das estimativas dos coeficientes.

O procedimento proposto para a modelação da função covariância local pressupõe implicitamente que a equação (69) é um modelo válido para a estimação (44). Este pressuposto não é claramente verificado, excepto se o campo gravítico no exterior da região em estudo se comporta em média como a área interior. É pois importante subtrair não só o campo gravitacional de referência T_0 mas também os efeitos locais da topografia (conforme descrito em Catalão (1999), capítulo 3). Esta solução também não será satisfatória, tendo como consequência que a lei de propagação das covariâncias não poderá ser expressa de uma forma simples como a equação (48) através de uma simples modificação das variâncias de grau. Poderá ser confirmado se possível pelo cálculo de valores empíricos da covariância para várias quantidades diferentes do campo gravítico. No oceano, poderá ser conseguido usando anomalias da gravidade em conjunto com altitudes da superfícies oceânica obtidas de altimetria por satélites, tomadas como sendo a ondulação do geóide.

Tendo como objectivo o ajuste da covariância empírica à covariância modelo, subsistem duas questões que deverão ser respondidas: primeiro, quantos serão os parâmetros essenciais à determinação da função modelo? Segundo, qual a relação das variáveis da equação (69) com estes parâmetros? A primeira questão foi estudada por Moritz (1980) para funções covariância isotropas e homogêneas no plano, que poderão ser desenvolvidas no espaço exterior. Foi

demonstrado que as funções covariância harmónicas com simetria rotacional no espaço têm uma equivalência no plano e que os resultados obtidos para essas aproximações no plano são transportadas para o caso esférico com poucas modificações.

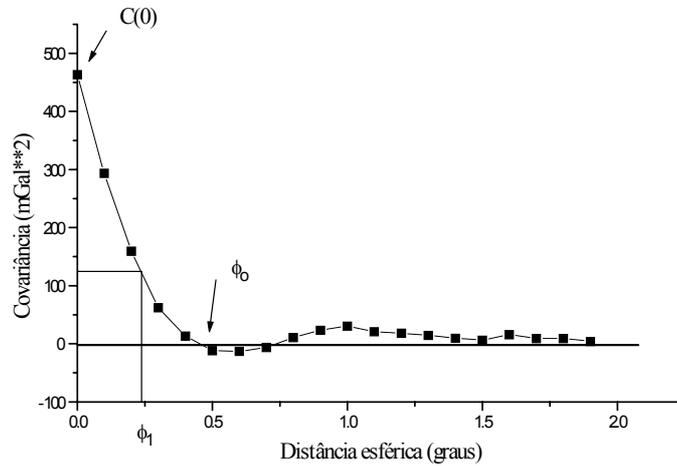


Figura 3.1 - Parâmetros essenciais da função covariância.

Moritz (1980) define três parâmetros essenciais para a função covariância do tipo (69): a variância C_0 , a distância de correlação ϕ_1 e o parâmetro de curvatura χ (Fig. 3.1). A variância C_0 é o valor da função covariância $C(\psi)$ para o argumento $\psi = 0$:

$$C_0 = C(0) \quad (71)$$

A distância de correlação ϕ_1 é o valor do argumento para o qual;

$$C(\phi_1) = C_0 / 2 \quad (72)$$

O parâmetro de curvatura χ está relacionado com a curvatura da curva da função covariância para $\psi=0$ e é dado por

$$\chi = k \phi_1 / C_0 \quad (73)$$

em que k é a curvatura.

Estes três parâmetros foram designados como essenciais. Isto não quer dizer que duas funções covariância que têm os mesmos valores numéricos para os parâmetros sejam iguais. Mas o seu comportamento em ordem à interpolação será bastante similar. A variância C_0 é um género de factor de escala para os erros de interpolação. O parâmetro de curvatura χ caracteriza o comportamento da função covariância para pequenas distâncias ψ , enquanto que ϕ_1 descreve o comportamento para distâncias próximas da própria distância de correlação. Isto indica que a forma (perfil) da curva da função covariância para distâncias maiores que $1.5 \phi_1$ não é decisiva, um facto que é confirmado por cálculo numérico. De notar que a representação de todo o espectro só poderá ser conseguida se ajustarmos uma função covariância a estes três

parâmetros. Um modelo que utilize dois destes parâmetros poderá produzir uma imagem errada de parte do espectro.

Um outro parâmetro importante é a distância do primeiro zero ϕ_0 , distância esférica onde ocorre o primeiro zero da função covariância, que pode ser usado para fixar o valor de N da equação (69).

A noção de função covariância local para uma região extensa como a nossa área de trabalho requer alguma explicação. É óbvio que as funções covariância empírica determinadas em zonas diferentes deverão ser diferentes de uma zona para outra. No entanto isto poderá não ser devido a uma diferença na estrutura local dos dados mas poderá ser causado por estruturas globais. É pois necessário em primeiro lugar eliminar os efeitos globais no sentido de tornar visíveis as características locais. Definimos então, de uma forma heurística, a função covariância local como uma função que representa a estrutura do campo gravítico para uma certa zona, após a remoção das tendências globais.

A função covariância local reflecte o comportamento local do campo gravítico e por isso poderá também fornecer alguma informação relativa ao erro de estimação e à distância entre observações para se poder atingir uma determinada precisão definida previamente. Para tal necessitamos de uma regra simples que relacione a média do erro de estimação com o espaçamento médio das observações. Consideremos a situação em que temos um único tipo de dados, com uma função covariância isótropa $C(\psi)$. Para esse efeito consideremos que dispomos de uma boa aproximação para $\psi < \phi_0$:

$$C(\psi) = C_0 (1 - 0.5 (\psi / \phi_1)^2) \quad (74)$$

Então, com uma única observação, temos o seguinte erro médio quadrático para a estimação (Tscherning, 1985):

$$\begin{aligned} e^2 &= C_0 - C(\psi)^2 / C_0 \\ &= C_0 ((\psi / \phi_1)^2 - (\psi / \phi_1)^2 / 4) \end{aligned}$$

ou

$$e = C_0^{1/2} (\psi / \phi_1) \quad (75)$$

O erro médio numa área quadrada com a dimensão d e uma observação no meio desse quadrado é

$$\bar{e}^2 \approx C_0 \frac{d^2}{6\phi_1} \quad (76)$$

para um espaçamento de dados com uma distância média d entre pontos o erro será (para $d < 2\phi_1$)

$$e^2 = C_0 (0.3 d / \phi_1)^2 \quad (77)$$

Deste modo, um espaçamento médio entre pontos será definido se for determinada a variância dos dados e a distância de correlação da função covariância, e for definido o erro com que se pretende a estimação.

5.4 Métodos de ajuste da covariância local (Método de Knudsen)

A função covariância modelo é determinada com base na covariância empírica local em que os parâmetros R_B , A e N de uma determinada função modelo são estimados por ajuste aos dados empíricos. Os critérios para o ajuste consistem em igualar valores dos parâmetros essenciais das duas funções covariância, ou seja determinar valores para N , R_B e A de modo que a função covariância modelo tenha os mesmos valores de variância $C(0)$, da distância de correlação ϕ_1 e a distância do primeiro zero ϕ_0 que a função covariância local. Estes três parâmetros essenciais da função covariância empírica representam as propriedades locais do campo gravítico.

Para a resolução do problema do ajuste da covariância empírica à covariância local definida pela equação (69), Knudsen (1987) apresentou um método baseado na inversão por mínimos quadrados. O ajuste do modelo da expressão nessa equação, é conseguido por ajuste dos parâmetros R_B e A . Adicionalmente, é introduzido um terceiro parâmetro α , assumindo a expressão das covariâncias, da anomalia da gravidade, o seguinte aspecto:

$$C(P, Q) = \alpha \sum_{n=2}^N c_n^e \left(\frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos \psi) + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+24)} \left(\frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos \psi) \quad (78)$$

Com este parâmetro, as variâncias de grau dos erros dos coeficientes do potencial são escaladas, de modo que estes representem a qualidade da aproximação dos coeficientes do potencial na região em estudo e no sistema de referência.

O modelo utilizado por Knudsen (1987) para ajustar as covariâncias empíricas às covariâncias modelo é o seguinte :

$$x - x_0 = (A^T C_y^{-1} A + C_x^{-1})^{-1} A^T C_y^{-1} (y - y_0) \quad (79)$$

em que:

- x são os parâmetros a ajustar (α , A , R_B)
- y são os valores da covariância empírica
- y_0 são os valores do modelo usando os parâmetros iniciais x_0
- A é a matriz Jacobiana de $\partial y_i / \partial x_j$
- C_y é a matriz do erro de y
- C_x é a matriz da variância de $(x - x_0)$

A não linearidade da relação entre o modelo e R_B conduz à implementação de um processo iterativo no qual, em cada iteração, o ajuste dos parâmetros x é calculado pela expressão anterior.

O valor de N , relativo à ordem do modelo geopotencial, é seleccionado por ajuste do primeiro zero da função covariância empírica, uma vez que quanto maior for a ordem mais perto da origem está o primeiro zero. A ordem N é determinada pela relação $N = 90^\circ/\phi_0$, em que ϕ_0 é a distância do primeiro zero da função (em graus sexagesimais). O valor de R_B , ou mais exactamente $R_B - R_E$, deverá ser relativamente pequeno, procurando que o ruído (diferença entre a variância empírica e a modelo) seja positivo. O coeficiente A é um termo livre com unidades de mGal^2 . O raio da esfera de Bjerhammar é substituído pela distância a essa esfera ($R_B - R_E$), de modo que se consiga obter uma maior precisão no ajuste deste valor face ao seu pequeno valor (p.e de 0.2km por 6378km), assim o ajuste deste parâmetros é transformado num acréscimo (ou decréscimo) na ordem de 0.2 km para 3 km.

A precisão do ajuste é dada pela expressão:

$$Q^2 = \frac{1}{(n - m)} (y - y_0)^T C_y^{-1} (y - y_0) \quad (80)$$

em que n é o número de dados e m é o número de parâmetros ($m=3$).

Referências

- Arabelos, D. and C.C. Tscherning (1988), "Gravity field mapping from satellite altimetry, sea-gravimetry and bathymetry in the Easter Mediterranean." *Geophysical Journal*, Vol. 92, pp. 195-206.
- Balmino, G. (1978), "Introduction to least-squares collocation." In *Approximation Methods in Geodesy*, Eds. H. Moritz and H. Sünkel, H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, pp. 47-88.
- Catalão, J. (1999), *Geodesia Física*. Texto não publicado, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Forsberg, R. (1984), "A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling." *Dept. of Geodetic Science and Surveying*, Rep. No. 355, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Goad, C.C., C.C. Tscherning and M.M. Chin (1984), "Gravity empirical covariance values for the continental United States." *Journal of Geophysical Research*, Vol. 89, No. B9, Sept. 10, pp. 7962-7968.
- Heiskanen, W.A. and H. Moritz (1967), *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Company, San Francisco.
- Knudsen, P. (1987), "Estimation and modelling of the local empirical covariance function using gravity and satellite altimeter data." *Bulletin Géodésique*, Vol. 61, pp. 145-160.
- Knudsen, P. (1988), "Determination of local empirical covariance functions from residual terrain reduced altimeter data." *Dept. of Geodetic Science and Surveying*, Rep. No. 395, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Moritz, H. (1978), "Introduction to interpolation and approximation." In *Approximation Methods in Geodesy*, Eds. H. Moritz and H. Sünkel, H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, pp. 1-45.
- Moritz, H. (1980), *Advanced Physical Geodesy*. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Rapp, R.H. (1978), "Results of the application of least-squares collocation to selected geodetic problems." In *Approximation Methods in Geodesy*, Eds. H. Moritz and H. Sünkel, H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, pp. 117-156.
- Rapp, R.H. (1986), "Global geopotential solutions." In *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*, Lecture Notes in Earth Sciences, Ed. H. Sünkel, Springer-Verlag, pp. 365-416.

Sansò, F. (1986), "Statistical methods in physical geodesy." In *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*, Lecture Notes in Earth Sciences, Ed. H. Sünkel, Springer-Verlag, pp. 49-156.

Schwarz, K.P. (1978), "On the application of least-squares models to physical geodesy." In *International Summer School in the Mountains on Mat. Methods in Physical Geodesy*, Eds. H. Moritz and H. Sünkel, Ramsau, Austria, Aug. 23 - Sept. 2, 1977, H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, pp. 89-116.

Tscherning, C.C. (1976), "Covariance expressions for second and lower order derivatives of the anomalous potential." *Dept. of Geodetic Science*, Rep. No. 225, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Tscherning, C.C. (1978), "Introduction to functional analysis with a view to its applications in approximation theory." In *Approximation Methods in Geodesy*, Eds. H. Moritz and H. Sünkel. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, pp. 157-192.

Tscherning, C.C. (1985), "Local approximation of the gravity potential by least squares collocation." In *Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation*, Ed. K.P. Schwarz, Beijing, China, Aug. 21 - Sept. 4, 1984, Pub. 60003, Univ. of Calgary, Calgary, Canada, pp. 277-362.

Tscherning, C.C. (1986), "Functional methods for gravity field approximation." In *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*, Lecture Notes in Earth Sciences, Ed. H. Sünkel, Springer-Verlag, pp. 3-48.

Tscherning, C.C. and R.H. Rapp (1974), "Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models." *Dept. of Geodetic Science*, Rep. No. 208, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Vanicek, P. and E. Krakiwsky (1982), *Geodesy - the Concepts*. Second Edition, Elsevier.